

## Příklady z logiky – 2

Petr Olmer, 27. února 2006

1. Ověřte, zda následující formule jsou tautologickými důsledky teorie  $T = \{(p \rightarrow q) \ \& \ r, q \ \& \ r, r \rightarrow s\}$ .  
 $q \rightarrow (\neg p \ \& \ s)$   
 $p \rightarrow s$   
 $(\neg s \rightarrow r) \ \& \ \neg q$   
 $q \ \& \ r$   
 $(\neg p \rightarrow (q \vee \neg r)) \vee s$
2. Ověřte, zda následující formule jsou tautologickými důsledky teorie  $T = \{p \ \& \ \neg q, p \rightarrow (\neg p \rightarrow r), r \vee \neg s\}$ .  
 $\neg q \vee s$   
 $q \rightarrow (p \ \& \ r)$   
 $(p \rightarrow q) \vee (r \rightarrow s)$   
 $(\neg r \ \& \ s) \vee q$   
 $p \ \& \ r \ \& \ \neg q$
3. Mějme  $T = \{p_n \rightarrow p_m \mid n < m\}$ . Které formule tvaru  $p_n \rightarrow p_m$  vyplývají z  $T$ ?
4. Mějme nekonečné spočetné množiny atomů  $\{p_0, p_1, p_2, \dots\}$  a  $\{q_0, q_1, q_2, \dots\}$ . Mějme teorii  $T = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \{p_i \rightarrow (p_{i+1} \vee q_{i+1})\} \cup \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \{q_i \rightarrow (p_{i+1} \vee q_{i+1})\}$ .  
Pro které dvojice  $n, m$  formule  $p_n \rightarrow p_m$  vyplývá z  $T$ ? Pro které dvojice  $n, m$  formule  $p_n \rightarrow (p_m \vee q_m)$  vyplývá z  $T$ ?
5. Následující formule vyjádřete jen pomocí uvedených logických spojek.  
 $A \ \& \ B$  pomocí  $\neg, \rightarrow$   
 $A \rightarrow B$  pomocí  $\neg, \ \&$   
 $A \vee B$  pomocí  $\neg, \rightarrow$   
 $A \rightarrow B$  pomocí  $\neg, \vee$   
 $(A \ \& \ (B \vee \neg C))$  pomocí  $\neg, \rightarrow$   
 $\neg(A \vee B) \ \& \ (C \vee \neg A)$  pomocí  $\neg, \rightarrow$
6. Ukažte, že není pravda, že každá formule je ekvivalentní s nějakou formulí sestavenou jen pomocí implikace, konjunkce a disjunkce.
7. Ukažte, že každá formule je ekvivalentní s nějakou formulí neobsahující jinou spojku než NAND (negace konjunkce, Shefferova spojka).
8. Kolik různých binárních logických spojek existuje? Pro kolik z nich platí, že pouze touto jedinou spojkou lze vyjádřit všechny formule?

9. Následující formule převedte na (minimální) CNF a DNF.

- $(A \& B) \rightarrow C$
- $(A \rightarrow B) \leftrightarrow (C \rightarrow D)$
- $A \vee \neg B \vee C$
- $(A \leftrightarrow B) \rightarrow (C \rightarrow D)$
- $A \rightarrow (B \vee (A \& C))$
- $A \leftrightarrow (B \vee C)$
- $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \vee D$
- $(\neg B \rightarrow A) \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$
- $((\neg A \rightarrow B) \& C) \rightarrow (C \rightarrow \neg(A \vee B))$
- $(A \rightarrow \neg C) \rightarrow (((A \& B) \vee \neg C) \rightarrow (C \rightarrow A))$
- $((A \rightarrow B) \rightarrow C) \leftrightarrow \neg B$
- $(A \rightarrow B) \& (\neg B \vee \neg C) \vee (A \rightarrow C)$
- $((A \rightarrow B) \rightarrow (A \vee D)) \vee (C \leftrightarrow (A \& D))$
- $A \rightarrow (B \rightarrow (C \rightarrow (A \& B \& C)))$
- $(A \vee B) \rightarrow (A \& B)$
- $((A \rightarrow B) \rightarrow B) \rightarrow A$
- $\neg(A \vee \neg A) \rightarrow (A \vee \neg A)$
- $A \rightarrow \neg(A \rightarrow \neg A)$
- $(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$
- $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow C))$
- $((A \vee B) \rightarrow (((A \& \neg C) \rightarrow B) \rightarrow (B \vee C)))$
- $(A \rightarrow B) \& (B \rightarrow C) \& (C \rightarrow A)$
- $(A_1 \rightarrow (A_2 \rightarrow (A_3 \rightarrow \dots \rightarrow (A_{n-1} \rightarrow A_n) \dots)))$

10. Mějme výrokovou formuli  $A$  ve tvaru  $D \& \bigwedge_i (B_i \vee p) \& \bigwedge_j (C_j \vee \neg p)$  pro  $i = 1, 2, \dots, n$  a  $j = 1, 2, \dots, m$ , kde  $p$  je výrokový atom nevyskytující se ve formulích  $D, B_i, C_j$ . Utvořme z  $A$  následující formuli  $A'$ :  $D \& \bigwedge_{i,j} (B_i \vee C_j)$ .

Rozhodněte, zda platí:

- a. Je-li  $v$  pravdivostní ohodnocení, které splňuje  $A'$ , pak  $v$  splňuje všechny formule  $B_i$  nebo všechny formule  $C_j$ .
  - b.  $A$  je splnitelná, právě když  $A'$  je splnitelná.
  - c.  $A$  a  $A'$  jsou ekvivalentní.
11. Ukažte, že každá formule v CNF je tautologie, právě když každá její složka obsahuje dva opačné literály (tj. nějaký atom a jeho negaci).
  12. Ukažte, že každá formule v DNF je splnitelná, právě když alespoň jedna její složka neobsahuje dva opačné literály.