# Příklady z logiky – 3

Petr Olmer, 6. března 2006

1. Dokažte: Formule $A$ je splnitelná, právě když $\neg A$ není tautologie
2. Dokaže: Pokud jsou $A \to B$ i $B \to C$ tautologie, pak je i $A \to C$ tautologie.
3. Rozhodněte, zda platí:

   Když $A$ je tautologie a $B$ vznikne z $A$ nahrazením některých výskytů atomu $p$ toutéž formulí $C$, pak je $B$ tautologie.

   Když $A$ je tautologie a $B$ vznikne z $A$ nahrazením všech výskytů atomu $p$ toutéž formulí $C$, pak je $B$ tautologie.

   Když $A$ je tautologie a $B$ vznikne z $A$ nahrazením všech výskytů atomu $p$ libovolnými (i různými) formulemi, pak je $B$ tautologie.

   Když $B_1$ resp. $B_2$ vznikne z $A$ nahrazením některých výskytů atomu $p$ formulí $C_1$ resp. $C_2$ a $C_1$ a $C_2$ jsou ekvivalentní, pak jsou $B_1$ a $B_2$ ekvivalentní.
4. Pro libovolnou teorii $T$ označme $Cl(T)$ množinu všech tautologických důsledků teorie $T$. Rozhodněte, zda pro každou teorii $T$ či pro každé dvě teorie $T$ a $S$ platí:

   $T \subseteq Cl(T)$

   $Cl(Cl(T)) = Cl(T)$

   $T \subseteq S \Rightarrow Cl(T) \subseteq Cl(S)$

   $Cl(T \cup S) = Cl(T) \cup Cl(S)$
5. Nechť je $A$ libovolná formule. Označme $A_p(true)$ resp. $A_p(false)$ formuli, která z ní vznikne nahrazením všech výskytů atomu $p$ logickou konstantou $true$ resp. $false$. Dokažte, že $A \to A_p(true) \vee A_p(false)$ je tautologie.
6. Dokažte: $T \models A$ právě když $T \cup \{\neg A\}$ je sporná.
7. Nechť je $T$ maximální bezesporná množina. Dokažte:

   $T \models A \Rightarrow A \in T$

   pro každou formuli $A$ je právě jedna z formulí $A$, $\neg A$ prvkem $T$

   $A \;\&\; B \in T$ právě když $A \in T$ a $B \in T$

   $A \vee B \in T$ právě když $A \in T$ nebo $B \in T$