

## Příklady z logiky – 5

Petr Olmer, 20. března 2006

1. Dokažte, že formální systém výrokové logiky se schematy axiomů (A1) – (A3) a odvozovacím pravidlem *modus ponens* je stejně silný jako formální systém se stejnými axiomy a *pravidlem řezu*. Pravidlo řezu: 
$$\frac{\neg A \vee B \quad A \vee C}{B \vee C}$$
2. Dokažte, že formální systém výrokové logiky se schematy axiomů (A1) – (A3) a odvozovacím pravidlem *modus ponens* je stejně silný jako formální systém se stejným odvozovacím pravidlem a se schematy (A1), (A2) a (A4). Schema (A4):  $(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow ((\neg B \rightarrow A) \rightarrow B)$
3. Uvažujte smyšlený výrokový logický systém, ve kterém se připouští jediná logická spojka  $\rightarrow$ , jediné axiomatické schema  $A \rightarrow A$  a jediné odvozovací pravidlo *modus ponens*. Rozhodněte, zda v tomto systému lze dokázat i nějakou formuli, která není axiomem.  
platí věta o dedukci.
4. Nechť jsou  $T$  a  $S$  teorie,  $A$  a  $B$  formule. Dokažte:  
Je-li  $T \subseteq S$  a  $T \vdash A$ , potom  $S \vdash A$ .  
 $T \vdash A$  právě když pro nějakou konečnou podmnožinu  $S \subseteq T$  platí  $S \vdash A$ .  
Pokud  $T \vdash C$  pro každou formuli  $C$  z množiny  $S$  a pokud  $S \vdash A$ , potom  $T \vdash A$ .