Příklady z logiky – 6

Petr Olmer, 27. března 2006

1. Následující formule převeďte na jejich čisté varianty:

   $(\forall x)(x > 5)\ \&\ x = y$

   $(\forall x)(\exists y)x > y\ \&\ x + 2 < y$

   $(x > y) \to ((\forall z)(y = z) \to x > z)$

2. Negujte následující formule tak, aby negace nebyly před kvantifikátory:

   $((\forall x)x < 5) \leftrightarrow (\exists y)((\forall z)x + 5 = y + z)$

   $((\forall x)x > 0\ \&\ (\exists y)y > x) \vee ((\exists z)z = x + y \to (\forall a)a < z)$

   $(\forall x)(\exists y)(x > 5 \to y > x)\ \&\ (\exists y)(x > 5 \to y > x) \leftrightarrow (\exists y)(y > x\ \&\ (\forall x)(x > 5))$

   $(\forall x)(\forall y)((\exists z)(z > 0) \to (x + y = z\ \&\ (\exists c)(x - y = z - c)))$

3. Sestrojte dvě realizace jazyka, aby v jedné byla následující formule nesplněná a v jedné splněná.

   $(\forall x)(\exists y)(x = y + y)$

   $(\exists x)(\forall y)(f(y) < x)$

4. Ověřte, zda jsou následující formule platné v nějaké realizaci jazyka, případně zda jsou platné v každé realizaci jazyka:

   $(\exists x)P(x)$

   $(\forall x)P(x)$

   $(\exists x)(\forall y)(P(x, x)\ \&\ \neg P(x, y))$

   $(\exists x)(\exists y)(P(x)\ \&\ \neg P(y))$

   $(\exists x)(\forall y)P(x, y) \to (\forall y)(\exists x)P(x, y)$

   $(\exists x)(\forall y)P(x, y) \to (\forall z)(\exists x)Q(x, y, z)$

   $(\forall x)(\exists y)P(x, y) \to (\exists y)(\forall x)P(x, y)$

5. Určete, zda ve struktuře $M = \langle M, f\rangle$, kde $M = 0, 1, 2, 3, f(0) = 1, f(1) = 2, f(2) = 1, f(3) = 2$, platí následující formule:

   $(\forall x)(\exists y)(x = f(y))$

   $(\exists x)(f(f(x)) = x) \to (\exists x)(f(x) = x)$

   $(\exists y)(x = f(y)) \to f(f(x)) = x$

   $(f(x) = x) \to (f(x) \neq x)$

6. Určete, zda ve struktuře $M = \langle M, R\rangle$, kde $M = \{0, 1, 2\}$, $R = \{(0, 0), (0, 1), (1, 1), (1, 2), (2, 0), (2, 2)\}$, platí následující formule:

   $(\forall x)(\forall y)(\exists z)(R(x, z)\ \&\ R(z, y))$

   $(\forall x)(\exists y)(\exists z)(R(x, y)\ \&\ R(y, z)\ \&\ (z, x))$

   $(\forall x)(\forall y)(\exists z)(R(x, y)\ \&\ R(x, z))$