

Příklady z logiky – 7

Petr Olmer, 3. dubna 2006

1. Rozhodněte, zda platí:

$$A(x) \models (\forall x)A(x)$$

$$\models A(x) \rightarrow (\forall x)A(x)$$

$$A(x) \rightarrow B(x) \models (\forall x)A(x) \rightarrow (\forall x)B(x)$$

$$\models (A(x) \rightarrow B(x)) \rightarrow ((\forall x)A(x) \rightarrow (\forall x)B(x))$$

2. Mějme teorii s jedním binárním predikátem P a s dvěma axiomy $(\forall x)\neg P(x, x)$ a $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(P(x, y) \& P(y, z) \rightarrow P(x, z))$. Rozhodněte, zda v této teorii platí následující formule:

$$(\forall x)(\forall y)P(x, y) \rightarrow \neg P(y, x)$$

$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)(P(x, y) \& P(y, z) \rightarrow (x = y \vee y = z))$$

$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)(P(x, y) \& P(y, z) \rightarrow (x = y \vee y = z) \rightarrow \neg(\exists x)(\exists y)(\exists z)(P(x, y) \& P(y, z)))$$

3. Mějme binární predikát Q a následující formule:

$$A : \quad \neg(\exists x)(\exists y)(\exists z)(Q(x, y) \& Q(y, z))$$

$$B : \quad (\forall x)(\forall y)(\forall z)(Q(x, y) \& Q(y, z) \rightarrow (x = y \vee y = z))$$

$$C : \quad (\forall x)(\forall y)(\forall z)(Q(x, y) \& Q(y, z) \rightarrow Q(x, z))$$

Rozhodněte a případně dokažte, zda C vyplývá z A , zda C vyplývá z B , zda A vyplývá z B a zda B vyplývá z A .

4. Ověřte, zda jsou následující formule platné v nějaké realizaci jazyka, případně zda jsou platné v každé realizaci jazyka:

$$(\forall x)P(x) \rightarrow (\exists x)P(x)$$

$$(\forall x)(A(x, z) \rightarrow B(x, y)) \rightarrow ((\forall x)A(x, z) \rightarrow (\forall x)B(x, y))$$

$$(\forall x)(\exists y)A(x, y, z) \rightarrow (\exists y)(\forall x)A(x, y, z)$$

$$(\forall x)(A \rightarrow B(x)) \rightarrow (A \rightarrow (\forall x)B(x))$$

$$(\forall x)(A(x, y) \& B(x, y)) \rightarrow ((\forall x)A(x, y) \& (\forall x)B(x, y))$$

$$(\forall x)(A(x, y) \rightarrow B(x, y)) \rightarrow ((\forall x)A(x, y) \rightarrow (\forall x)B(x, y))$$

$$(\exists x)(A(x) \rightarrow B(x)) \rightarrow ((\exists x)A(x) \rightarrow (\forall x)B(x))$$

$$(\forall x)(A(x) \vee B(x)) \rightarrow ((\forall x)A(x) \vee (\forall x)B(x))$$

$$(\forall x)(\exists y)(A(x) \rightarrow B(y)) \rightarrow (\exists y)(\forall x)(A(x) \rightarrow B(y))$$

$$(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow ((\exists x)P(x) \rightarrow (\exists x)Q(x))$$

$$(\forall x)(\exists y)P(x, y) \rightarrow (\forall x)(\exists y)P(y, x)$$