Příklady z logiky – 8

Petr Olmer, 24. dubna 2006

1. Přepište formuli $(\forall a)(\exists x)(\forall b)(\exists y)ax = b^y$ na dvě ekvivalentní, ve kterých bude použit jen jeden typ kvantifikátoru (jednou obecný, jednou existenční).

2. Převeďte na prenexní normální tvar:

   $(\forall x)(P(x) \rightarrow (\forall y)(Q(x,y) \rightarrow \neg(\forall z)R(y,z)))$

   $(\exists x)A(x,y) \rightarrow (B(x) \rightarrow \neg(\exists u)A(x,u))$

   $P(x,y) \rightarrow (\exists y)(Q(y) \rightarrow (\exists x)Q(x) \rightarrow R(y)))$

   $(\forall x)((\forall y)(y < x \rightarrow P(y)) \rightarrow P(x)) \rightarrow (\forall x)P(x)$

   $(\exists x)P(x) \rightarrow (\exists x)(P(x) \ \& \ (\forall y)(y < x \rightarrow \neg P(y)))$

   $(\forall x)(\exists y)(x > 5 \rightarrow y > x) \ \& \ (\exists y)(x > 5 \rightarrow y > x) \leftrightarrow (\exists y)(y > x \ \& \ (\forall x)(x > 5))$

   $(\forall x)(\forall y)((\exists z)z > 0 \rightarrow (x + y = z \ \& \ (\exists c)x - y = z - c))$

   $((\forall x)(A(x) \rightarrow (\exists x)B(x)) \rightarrow (\forall x)(A(x) \ \& \ (\forall x)\neg B(x))$

   $(\forall x)x > 0 \ \& \ (\exists y)y > x$

   $(\exists z)z = x + y \rightarrow (\forall a)a < z$

   $((\forall x)x > 0 \ \& \ (\exists y)y > x) \vee ((\exists z)z = x + y \rightarrow (\forall a)a < z)$

3. Rozhodněte, zda je teorie s jediným binárním predikátem R a s axiomy $(\forall x)(\forall y)(\exists z)(R(x,z) \ \& \ R(y,z))$ a $\neg(\exists x)R(x,x)$ bezesporná.

4. Rozhodněte, zda je teorie se dvěma unárními predikáty R a S a s axiomem $(\forall x)(\exists y)(R(x) \rightarrow S(y)) \rightarrow (\exists y)(\forall x)(R(x) \rightarrow S(y))$ bezesporná.

5. Dokažte

   $(\forall x)(\exists y)((P(x,x) \ \& \ P(y,y)) \rightarrow P(x,y)) \rightarrow (\forall y)(\neg(\forall x)(P(x,x) \ \& \ \neg P(y,x) \ \& \ P(y,y)))$

6. Dokažte nebo vyvraťte:

   $A(x) \vdash (\forall x)A(x)$

   $\vdash A(x) \rightarrow (\forall x)A(x)$

   $A(x) \rightarrow B(x) \vdash (\forall x)A(x) \rightarrow (\forall x)B(x)$

   $\vdash (A(x) \rightarrow B(x)) \rightarrow ((\forall x)A(x) \rightarrow (\forall x)B(x))$

7. Dokažte logicky pravdivé formule z předchozích cvičení.