Příklady z logiky – 2

Petr Olmer, 26. února 2007

1. Ověřte, zda následující formule jsou tautologickými důsledky teorie $T = \{(p \to q) \ \& \ r, q \ \& \ r, r \to s\}$.

   a. $q \to (\neg p \ \& \ s)$

   b. $p \to s$

   c. $(\neg s \to r) \ \& \ \neg q$

   d. $q \ \& \ r$

   e. $(\neg p \to (q \vee \neg r)) \vee s$

2. Ověřte, zda následující formule jsou tautologickými důsledky teorie $T = \{p \ \& \ \neg q, p \to (\neg p \to r), r \vee \neg s\}$.

   a. $\neg q \vee s$

   b. $q \to (p \ \& \ r)$

   c. $(p \to q) \vee (r \to s)$

   d. $(\neg r \ \& \ s) \vee q$

   e. $p \ \& \ r \ \& \ \neg q$

3. Mějme $T = \{p_n \to p_m \mid n < m\}$. Které formule tvaru $p_n \to p_m$ vyplývají z T?

4. Mějme nekonečné spočetné množiny atomů $\{p_0, p_1, p_2, \ldots\}$ a $\{q_0, q_1, q_2, \ldots\}$. Mějme teorii $T = \bigcup_{i \in N} \{p_i \to (p_{i+1} \vee q_{i+1})\} \cup \bigcup_{i \in N} \{q_i \to (p_{i+1} \vee q_{i+1})\}$.

   a. Pro které dvojice n, m formule $p_n \to p_m$ vyplývá z T?

   b. Pro které dvojice n, m formule $p_n \to (p_m \vee q_m)$ vyplývá z T?

5. Ukažte, že není pravda, že každá formule je ekvivalentní s nějakou formulí sestavenou jen pomocí implikace, konjunkce a disjunkce.

6. Ukažte, že každá formule je ekvivalentní s nějakou formulí neobsahující jinou spojku než

   a. NAND (negace konjunkce)

   b. NOR (negace disjunkce)

7. Kolik různých binárních logických spojek existuje? Pro kolik z nich platí, že pouze touto jedinou spojkou lze vyjádřit všechny formule?

8. Následující formule převeďte na (minimální) CNF a DNF.

   a. $(A \ \& \ B) \to C$

   b. $(A \to B) \leftrightarrow (C \to D)$

   c. $A \vee \neg B \vee C$

   d. $(A \leftrightarrow B) \to (C \to D)$

   e. $A \to (B \vee (A \ \& \ C))$

f. $A \leftrightarrow (B \vee C)$

g. $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \vee D$

h. $(\neg B \rightarrow A) \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$

i. $((\neg A \rightarrow B) \mathbin{\&} C) \rightarrow (C \rightarrow \neg(A \vee B))$

j. $(A \rightarrow \neg C) \rightarrow (((A \mathbin{\&} B) \vee \neg C) \rightarrow (C \rightarrow A))$

k. $((A \rightarrow B) \rightarrow C) \leftrightarrow \neg B$

l. $(A \rightarrow B) \mathbin{\&} (\neg B \vee \neg C) \vee (A \rightarrow C)$

m. $((A \rightarrow B) \rightarrow (A \vee D)) \vee (C \leftrightarrow (A \mathbin{\&} D))$

n. $A \rightarrow (B \rightarrow (C \rightarrow (A \mathbin{\&} B \mathbin{\&} C)))$

o. $(A \vee B) \rightarrow (A \mathbin{\&} B)$

p. $((A \rightarrow B) \rightarrow B) \rightarrow A$

q. $\neg(A \vee \neg A) \rightarrow (A \vee \neg A)$

r. $A \rightarrow \neg(A \rightarrow \neg A))$

s. $(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$

t. $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow C))$

u. $((A \vee B) \rightarrow (((A \mathbin{\&} \neg C) \rightarrow B) \rightarrow (B \vee C)))$

v. $(A \rightarrow B) \mathbin{\&} (B \rightarrow C) \mathbin{\&} (C \rightarrow A)$

w. $(A_1 \rightarrow (A_2 \rightarrow (A_3 \rightarrow \ldots \rightarrow (A_{n-1} \rightarrow A_n) \ldots)$

9. Mějme výrokovou formuli A ve tvaru $D \mathbin{\&} \bigwedge_i (B_i \vee p) \mathbin{\&} \bigwedge_j (C_j \vee \neg p)$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$ a $j = 1, 2, \ldots, m$, kde p je výrokový atom nevyskytující se ve formulích D, B_i, C_j. Utvořme z A následující formuli A': $D \mathbin{\&} \bigwedge_{i,j} (B_i \vee C_j)$.

   Rozhodněte, zda platí:

   a. Je-li v pravdivostní ohodnocení, které splňuje A', pak v splňuje všechny formule B_i nebo všechny formule C_j.

   b. A je splnitelná, právě když A' je splnitelná.

   c. A a A' jsou ekvivalentní.

10. Ukažte, že každá formule v CNF je tautologie, právě když každá její složka obsahuje dva opačné literály (tj. nějaký atom a jeho negaci).

11. Ukažte, že každá formule v DNF je splnitelná, právě když alespoň jedna její složka neobsahuje dva opačné literály.