Příklady z logiky – 3

Petr Olmer, 5. března 2007

1. Dokažte: Formule A je splnitelná, právě když $\neg A$ není tautologie.

2. Dokažte: Pokud jsou $A \to B$ i $B \to C$ tautologie, pak je i $A \to C$ tautologie.

3. Rozhodněte, zda platí:

   a. Když A je tautologie a B vznikne z A nahrazením některých výskytů atomu p toutéž formulí C, pak je B tautologie.

   b. Když A je tautologie a B vznikne z A nahrazením všech výskytů atomu p toutéž formulí C, pak je B tautologie.

   c. Když A je tautologie a B vznikne z A nahrazením všech výskytů atomu p libovolnými (i různými) formulemi, pak je B tautologie.

   d. Když B_1 resp. B_2 vznikne z A nahrazením některých výskytů atomu p formulí C_1 resp. C_2 a C_1 a C_2 jsou ekvivalentní, pak jsou B_1 a B_2 ekvivalentní.

4. Pro libovolnou teorii T označme $Cl(T)$ množinu všech tautologických důsledků teorie T. Rozhodněte, zda pro každou teorii T či pro každé dvě teorie T a S platí:

   $T \subseteq Cl(T)$

   $Cl(Cl(T)) = Cl(T)$

   $T \subseteq S \Rightarrow Cl(T) \subseteq Cl(S)$

   $Cl(T \cup S) = Cl(T) \cup Cl(S)$

5. Nechť je A libovolná formule. Označme $A_p(true)$ resp. $A_p(false)$ formuli, která z ní vznikne nahrazením všech výskytů atomu p logickou konstantou $true$ resp. $false$. Dokažte, že $A \to A_p(true) \vee A_p(false)$ je tautologie.

6. Dokažte: $T \models A$, právě když $T \cup \{\neg A\}$ je sporná.

7. Nechť je T maximální bezesporná množina. Dokažte:

   a. $T \models A \Rightarrow A \in T$

   b. Pro každou formuli A je právě jedna z formulí A, $\neg A$ prvkem T.

   c. $A \;\&\; B \in T$, právě když $A \in T$ a $B \in T$

   d. $A \vee B \in T$, právě když $A \in T$ nebo $B \in T$