Příklady z logiky – 9

Petr Olmer, 23. dubna 2007

1. Přepište formuli $(\forall a)(\exists x)(\forall b)(\exists y)ax = b^y$ na dvě ekvivalentní, ve kterých bude použit jen jeden typ kvantifikátoru (jednou obecný, jednou existenční).

2. Převeďte na prenexní normální tvar:

   a. $(\forall x)(P(x) \rightarrow (\forall y)(Q(x,y) \rightarrow \neg(\forall z)R(y,z)))$

   b. $(\exists x)A(x,y) \rightarrow (B(x) \rightarrow \neg(\exists u)A(x,u))$

   c. $P(x,y) \rightarrow (\exists y)(Q(y) \rightarrow (\exists x)Q(x) \rightarrow R(y)))$

   d. $(\forall x)((\forall y)(y < x \rightarrow P(y)) \rightarrow P(x)) \rightarrow (\forall x)P(x)$

   e. $(\exists x)P(x) \rightarrow (\exists x)(P(x) \,\&\, (\forall y)(y < x \rightarrow \neg P(y)))$

   f. $(\forall x)(\exists y)(x > 5 \rightarrow y > x) \,\&\, (\exists y)(x > 5 \rightarrow y > x) \leftrightarrow (\exists y)(y > x \,\&\, (\forall x)(x > 5))$

   g. $(\forall x)(\forall y)((\exists z)z > 0 \rightarrow (x + y = z \,\&\, (\exists c)x - y = z - c))$

   h. $((\forall x)(A(x) \rightarrow (\exists x)B(x)) \rightarrow (\forall x)(A(x) \,\&\, (\forall x)\neg B(x))$

   i. $(\forall x)x > 0 \,\&\, (\exists y)y > x$

   j. $(\exists z)z = x + y \rightarrow (\forall a)a < z$

   k. $((\forall x)x > 0 \,\&\, (\exists y)y > x) \vee ((\exists z)z = x + y \rightarrow (\forall a)a < z)$

3. Rozhodněte, zda je teorie s jediným binárním predikátem R a s axiomy

   $(\forall x)(\forall y)(\exists z)(R(x,z) \,\&\, R(y,z))$

   $\neg(\exists x)R(x,x)$

   bezesporná.

4. Rozhodněte, zda je teorie se dvěma unárními predikáty R a S a s axiomem

   $(\forall x)(\exists y)(R(x) \rightarrow S(y)) \rightarrow (\exists y)(\forall x)(R(x) \rightarrow S(y))$

   bezesporná.