

Příklady z logiky – 10

Petr Olmer, 30. dubna 2007

1. Nalezňte teorii, která má jen nekonečné modely.
2. Dokažte:
 - a. $\vdash (\exists x)(P(x) \ \& \ Q(x)) \rightarrow (\exists x)P(x) \ \& \ (\exists x)Q(x)$
 - b. $\vdash (\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x) \rightarrow (\forall x)(P(x) \vee Q(x))$
 - c. $\vdash (\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow ((\forall x)P(x) \rightarrow (\forall x)Q(x))$
 - d. $\vdash (\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow ((\exists x)P(x) \rightarrow (\exists x)Q(x))$
3. Dokažte:
 - a. $\not\vdash (\exists x)P(x) \ \& \ (\exists x)Q(x) \rightarrow (\exists x)(P(x) \ \& \ Q(x))$
 - b. $\not\vdash (\forall x)(P(x) \vee Q(x)) \rightarrow (\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x)$
 - c. $\not\vdash ((\forall x)P(x) \rightarrow (\forall x)Q(x)) \rightarrow (\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x))$
 - d. $\not\vdash ((\exists x)P(x) \rightarrow (\exists x)Q(x)) \rightarrow (\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x))$
4. Dokažte
$$(\forall x)(\exists y)((P(x, x) \ \& \ P(y, y)) \rightarrow P(x, y)) \rightarrow (\forall y)(\neg(\forall x)(P(x, x) \ \& \ \neg P(y, x) \ \& \ P(y, y)))$$
5. Dokažte nebo vyvráťte:
$$A(x) \vdash (\forall x)A(x)$$
$$\vdash A(x) \rightarrow (\forall x)A(x)$$
$$A(x) \rightarrow B(x) \vdash (\forall x)A(x) \rightarrow (\forall x)B(x)$$
$$\vdash (A(x) \rightarrow B(x)) \rightarrow ((\forall x)A(x) \rightarrow (\forall x)B(x))$$
6. Dokažte logicky pravdivé formule z předchozích cvičení.